

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DU TROISIÈME CYCLE
DE PHYSIQUE SUPÉRIEURE

PAR

Emile RIEUTORD

Ingénieur T. P. E. - Licencié ès Sciences

Etude de la courbure de l'onde de choc en tube de choc

Soutenue le 10 Juillet 1964, devant la Commission d'Examen

MM. MESNARD ... Président

Ch. EYRAUD .. }
J. GRUAT } Membres du Jury

LYON

Imprimerie BOSC Frères
42, quai Gailleton, 42

1964

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DU TROISIÈME CYCLE
DE PHYSIQUE SUPÉRIEURE

PAR

Emile RIEUTORD

Ingénieur T. P. E. - Licencié ès Sciences

Etude de la courbure de l'onde de choc en tube de choc

Soutenue le 10 Juillet 1964, devant la Commission d'Examen

MM. MESNARD ... Président

Ch. EYRAUD . .
J. GRUAT } Membres du Jury

LYON

Imprimerie BOSC Frères
42, quai Gallieuton, 42

1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553421_0012

UNIVERSITE DE LYON - FACULTE DES SCIENCES

Doyens honoraires :

MM. LONGCHAMBON, DOUIN, MOUSSA, GAUTHIER Henri

Professeurs honoraires :

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER, MOUSSA, JAFFARD,
DOUIN, Henri EYRAUD, DEJARDIN, VIRET

Doyen :

M. BRACONNIER

Assesseurs :

MM. MESNARD
BOLDIN

Professeurs :

MM. LONGCHAMBON
PRETTRE
COURTY
KUHNER
MALECOT
PARIS
AUMERAS
COLONGE
JANIN
FLANDRIN
BERNARD
DUFAY Jean
NIGON
GAUTHIER Henri
WAUTIER
CHOPIN
CUEILLERON
BRACONNIER
EYRAUD Charles
SARAZIN
BOLDIN
PERES
MESNARD
GRANDMONTAGNE
BOUTILLIER
LAFOUCRIERE
DREUX
TEICHNER
PAVANS DE CECCATTY



Minéralogie
Chimie industrielle
Chimie-Physique
Botanique
Mécanique rationnelle et appliquée
Chimie Minérale
Chimie
Chimie organique
Physique générale
Géologie Appliquée
Physique Industrielle
Astronomie
Zoologie expérimentale
Géologie Générale
Zoologie
Chimie biologique
Chimie
Calcul différentiel et intégral
Chimie-physique appliquée
Physique nucléaire
Microbiologie et Mycologie
Physiologie
Electronique
Physique
Minéralogie
Physique nucléaire
Chimie organique
Chimie industrielle
Zoologie

Professeurs (suite)

MERLIN
DUFAY Maurice
FRAISSE
LUBET
PHILBERT
COHEN-ADAD
David Louis
CHANEL
MAURY
DEPRAZ
GAUTHIER Jean

Chimie analytique
Physique de l'Atmosphère
Mathématiques
Physiologie
Physique nucléaire
Chimie
Géologie générale
Psychophysiologie
Méthodes Mathématiques de la Physique
Physique nucléaire
Chimie

Professeurs sans chaire :

MM. GAUME
FERON
LAFORGUE
LEGAY
UZAN
CHENEVOY
GINET
ASCH
MICHEL Pierre
DUCET

Mlle MAITROT

MM. GEVIN
PONASSE
d'INCAN
LEFEBVRE
PERNET
CHERY
BERGEON

Mlle GAUTHERON

Physique
Mathématiques
Physique
Zoologie expérimentale S.P.C.N.
Physique S.P.C.N.
Géologie appliquée
Zoologie
Physique
Minéralogie
Biologie végétale
Physique
Géologie Générale
Mathématiques
Physique
Mathématiques
Mathématiques
Physique
Physique C.S.U.
Chimie biologique

Maîtres de Conférences :

Mme ERICSON
MM. MARTEL
MATHIEU
ERBEIA
DESCOTES
PICARD Philippe
LEMOIGNE
DEMARCO
MICHEL Georges
LEBRETON
DAVID Jean
TOUSSET
FEUVRAIS
PICARD Claude
SCHMITT

Physique Générale
Mécanique
Mécanique des fluides
Physique
Chimie organique
Mathématiques
Botanique
Géologie générale
Biochimie
Biologie végétale
Biologie animale
Chimie Propédeutique
Physique électricité
Mathématiques
Physique M.P.C.

Maître de Conférences adjoint :

M. PIERRON

Chimie

Conseiller administratif :

M. BURNET

Secrétaire Principal honoraire :

M. ROUX

I N T R O D U C T I O N

Un des effets particuliers de la viscosité sur les écoulements en tube de choc est la courbure de la surface de l'onde de choc.

Ce phénomène prévu théoriquement par R.A. HARTUNIAN (ref.1) a été mis en évidence par S.C. LIE et W.I. FYFE (ref.2). Il a été confirmé par R.E. DUFF et J.L. YOUNG (ref. 3), sans toutefois que la forme même de la surface d'onde ait, jusqu'ici, été déterminée avec précision.

La courbure étant d'autant plus marquée que la pression est plus faible, il nous a paru intéressant, à une époque où les recherches s'orientent vers les études à basse densité, d'obtenir un relevé du profil de l'onde de choc suffisamment précis pour permettre une appréciation correcte de la validité des résultats théoriques.

Les mesures ont été faites pour l'air à des nombres de Mach de l'onde de choc compris entre 3 et 4 et à des pressions en amont de l'onde de 0,2 à 4 mm de mercure.

Cette étude a été faite au laboratoire de Mécanique des fluides de l'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES de Lyon et nous tenons à remercier Monsieur le Professeur Ch. EYRAUD, Directeur du Département de Mécanique, pour tout l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

Notre gratitude va également à Monsieur le Professeur MESNARD qui a bien voulu accepter la Présidence de notre Jury.

Nous adressons des remerciements tous particuliers à Monsieur GRUAT, Maître de Conférences pour l'aide précieuse qu'il nous a fournie au cours de ce travail.

Enfin, nous remercions nos camarades du Laboratoire pour tous les services qu'ils nous ont rendus à maintes occasions.

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE

L'étude théorique de la courbure d'une onde de choc plane au voisinage d'une paroi a été abordée pour la première fois par Hartunian (ref.1).

Une solution approchée en a été donnée, dans le cas d'une onde se déplaçant le long d'une paroi plane, en considérant l'effet de la couche limite sur l'écoulement comme une petite perturbation du champ des vitesses à l'aval du front d'onde.

Dans la formulation du problème ainsi posé, Hartunian fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- l'onde de choc a une épaisseur nulle.
- la couche limite se développe immédiatement au "pied" de l'onde de choc et son épaisseur de déplacement à une distance x de l'onde de choc est
$$\delta^* = A \sqrt{x} .$$
- la courbure de l'onde de choc reste suffisamment faible pour admettre que l'écoulement aval demeure irrotationnel.

Avec les hypothèses sensiblement identiques, la solution de ce problème a été étendue par P.C.T. de BOER (ref. 4a-4b) au cas d'une onde de choc se déplaçant, soit entre 2 parois planes, soit dans un tube de section rectangulaire ou circulaire.

I - EQUATIONS DE BASE

Les équations du problème, dans un système d'axes lié à l'onde de choc, telles qu'elles résultent des hypothèses ci-dessus peuvent s'écrire, pour le cas d'un tube de section circulaire :

$$(1) \quad (1 - M_2^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi'}{\partial r'} = 0$$

$$(2) \quad u(o, r') = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(o, r') = f(r')$$

$$(3) \quad v(x', R) = \frac{\partial \varphi'}{\partial r'}(x', R) = g(x')$$

avec les notations suivantes :

- M_2 = nombre de Mach de l'écoulement en aval de l'onde de choc
- u = composante suivant l'axe du tube de la vitesse de perturbation
- v = composante suivant un diamètre du tube de la vitesse de perturbation.
- φ' = potentiel des vitesses de perturbation
- x', r' = système de coordonnées cylindriques lié à l'onde de choc
- R = rayon du tube.

L'équation (1) est l'équation classique du potentiel des vitesses dans la théorie des petites perturbations en écoulement compressible (cas où $M_2 \ll 1$).

Les équations (2) et (3) représentent les conditions aux limites. Les fonctions f, g , peuvent être obtenues en considérant qu'en chaque point l'onde de choc fait angle ϵ avec la normale à l'axe du tube.

Notant U_1 et U_2 la vitesse du fluide sur l'axe du tube de part et d'autre de l'onde de choc et U'_1 et U'_2 ces mêmes vitesses mais en un point quelconque de la section du tube, nous voyons d'après le croquis ci-contre que :

$$u = \text{proj}/Ox' \text{ de } (U'_2 - U_2)$$

$$v = \text{proj}/Or' \text{ de } (U'_2 - U_2)$$

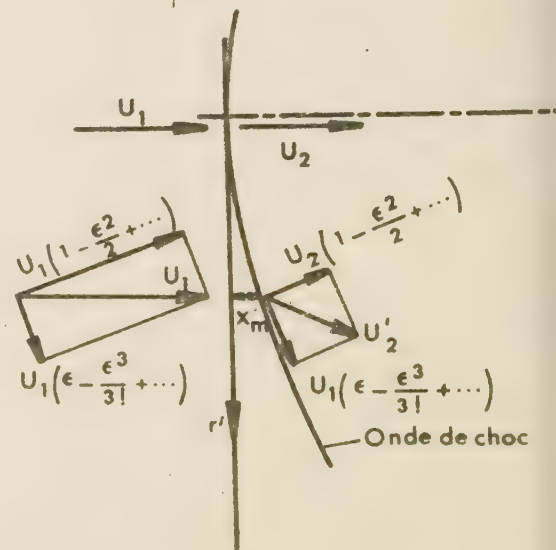


Fig. 1

d'où en négligeant les termes en ε d'ordre > 1

$$u(x_m, r) = 0$$

$$v(x_m, r) = (U_1 - U_2) \varepsilon$$

ou encore en négligeant la différence d'abscisse x_m entre l'onde de choc et le plan $x = 0$

$$(4) \quad u(0, r') = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(0, r') = 0$$

$$(5) \quad v(0, r') = \frac{\partial \varphi'}{\partial r'}(0, r') = (U_1 - U_2) \varepsilon$$

L'équation (4) fournit une première condition aux limites.

La seconde condition sera obtenue à partir de l'équation de la couche limite le long de la paroi du tube.

A ce sujet les diverses études faites (ref.5) ont conduit à une épaisseur de déplacement δ^* de la forme $\delta^* = Ax^s$ avec $s = \frac{1}{2}$ pour une couche laminaire et $s = \frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ pour une couche turbulente selon que la loi de puissance admise pour le profil des vitesses est de $1/5$ ou $1/7$.

Quant au coefficient A il s'agit d'une fonction complexe des paramètres caractéristiques de l'écoulement en aval de l'onde de choc. Ce coefficient peut en première approximation être considéré comme indépendant de x' (ref.5e)

Dans ces conditions, la vitesse v peut s'écrire :

$$\frac{v(x', R + \delta^*)}{U_2} = \frac{d \delta^*}{d x'} = \frac{s A U_2}{x'^{1-s}}$$

ou en première approximation, puisque $\frac{\delta^*}{R}$ est très petit :

$$(6) \quad v(x', R) = \frac{s A U_2}{x'^{1-s}} = g(x')$$

quant à l'équation (5)

$$v(0, r') = (U_1 - U_2) \varepsilon$$

elle nous permet d'obtenir la forme de la surface d'onde.

En effet, nous pouvons écrire le long d'une méridienne m

$$\frac{dx_m}{dr'} = \frac{\partial \varphi'(0, r')}{\partial r'} \cdot \frac{1}{U_1 - U_2}$$

d'où

$$x_m = \varphi'(0, r') \cdot \frac{1}{U_1 - U_2} + \text{constante}$$

avec l'hypothèse :

$$x_m = 0 \text{ pour } r' = 0$$

on obtient :

$$(7) \quad x_m = \frac{\varphi'(0, r') - \varphi'(0, 0)}{U_1 - U_2}$$

équation de la méridienne de l'onde de choc.

II - CALCUL DU POTENTIEL DES VITESSES DE PERTURBATION.

EQUATION DE LA MERIDIENNE A LA SURFACE D'ONDE.

L'équation (1) du potentiel des vitesses se ramène aisément à l'équation classique de Laplace par simple transformation affine en posant :

$$(8) \quad x' = \beta x \quad \text{où} \quad (9) \quad \beta = \sqrt{1 - M_2^2}$$

$$(10) \quad r' = r$$

et $\varphi'(x', r') \equiv \varphi(x, r)$, les conditions aux limites étant

$$(11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, r) = 0$$

et

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, R) = F(x) \quad \text{où} \quad F(x) \equiv g(x')$$

Le problème à résoudre apparaît ainsi sous la forme du problème de Neumann.

Comme indiqué ci-dessus, le cas plan, avec une seule frontière rectiligne, a été résolu par Hartunian (ref.1) selon une méthode classique en remplaçant les conditions aux limites par une distribution de sources.

Cette façon de traiter le problème a été étendue par de Boer (ref.4) au cas d'une onde de choc se déplaçant entre 2 ou 4 parois planes.

Dans le cas d'une paroi cylindrique, ce dernier précise que la méthode ci-dessus n'est pas applicable et il traite le problème en partant de solutions de la forme :

$$I_0(\gamma r) \begin{cases} \cos \gamma x \\ \sin \gamma x \end{cases} \quad I_0 : \text{fonction modifiée de Bessel de première espèce et d'ordre zéro}$$

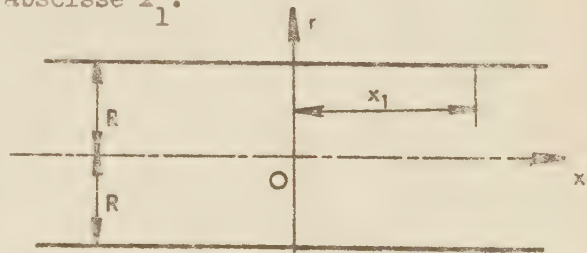
Cette méthode (a) dans l'hypothèse d'une couche limite s'étendant du pied de l'onde de choc à l'infini avec une épaisseur de déplacement $\delta^* = \frac{AU_0}{(\beta x)^3}$ conduit à la solution :

$$(13) \quad \varphi(x, r) = \frac{2\Gamma(s+1)\cos\frac{\pi s}{2} AU_0}{\pi \beta^{1-s}} \int_0^\infty \frac{\cos(vx)I_0(vr)-1}{v^{s+1}I_1(vr)} dr$$

Nous ne reviendrons pas ici sur le détail du calcul qui conduit au résultat ci-dessus et nous nous bornerons à montrer que le cas du tube cylindrique peut lui aussi être traité par la méthode de distribution de sources.

Pour cela nous supposerons répartis sur la paroi du tube des puits d'intensité de surface $q(x_1)$ fonction de l'abscisse x_1 .

Le potentiel créé par l'ensemble des puits répartis sur un élément de cylindre dx_1 , situé à une distance x_1 est :



$$(14) \quad d\varphi = 2q(x_1)\sqrt{\frac{R}{r}} Q_{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-x_1)^2 + (R-r)^2}{2Rr} \right) dx_1$$

où $Q_{-\frac{1}{2}}$ est la fonction de Legendre de seconde espèce.

(a) Cette même méthode a d'ailleurs été également employée par de Boer pour traiter les autres cas précités.

En un point intérieur quelconque le potentiel créé par une distribution de puits sur toute la surface du tube sera :

$$(15) \quad \varphi = 2 \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) Q_{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-x_1)^2 + (R-r)^2}{2Rr} \right) dx_1$$

Or, la transformée de Fourier de $Q_{m-\frac{1}{2}}$ permet d'écrire :

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu x_1} Q_{m-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-x_1)^2 + (R-r)^2}{2Rr} \right) dx_1 = \pi^2 \sqrt{Rr} J_m(i\nu r) H_m^{(0)}(i\nu R) e^{i\nu x} \text{ si } 0 \leq$$

où $H_m^{(0)}$ est la première fonction de Hankel.

Par inversion de cette transformée pour l'indice $m = 0$ on obtient :

$$(17) \quad Q_{-\frac{1}{2}} = \frac{i\pi}{2} \sqrt{Rr} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(i\nu r) H_0^{(0)}(i\nu R) e^{i\nu(x-x_1)} d\nu$$

d'où

$$(18) \quad \varphi = i\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(i\nu r) H_0^{(0)}(i\nu R) e^{i\nu x} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) e^{i\nu x_1} dx_1$$

$q(x_1)$ sera choisi de façon à satisfaire aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, r) &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, R) &= F(x) \end{aligned}$$

La première condition sera automatiquement satisfaite en choisissant une distribution de puits symétrique par rapport au plan $x = 0$, c'est-à-dire en prenant pour $q(x_1)$ une fonction paire.

La seconde condition sera satisfaite en choisissant l'intensité des puits de façon que

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = F(x)$$

comme

$$(19) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = -i\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} i\nu J_1(i\nu r_1) H_0^{(0)}(i\nu R) e^{i\nu x} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) e^{-i\nu x_1} dx_1$$

on a
$$F(x) = \pi R \int_{-\infty}^{+\infty} \nu J_1(i\nu r_1) H_0^{(0)}(i\nu r_1) e^{i\nu x} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) e^{-i\nu x_1} dx_1$$

(20)

et par inversion

$$2\pi^2 R \nu J_1(i\nu r_1) H_0^{(0)}(i\nu r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) e^{-i\nu x_1} dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\nu x} dx$$

d'où

(21)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) e^{-i\nu x_1} dx_1 = \frac{1}{2\pi^2 R \nu J_1(i\nu R) H_0^{(0)}(i\nu R)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\nu x} dx$$

et

$$\varphi = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(i\nu r)}{\nu J_1(i\nu r)} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\nu(x-x_1)} dx_1$$

(en remplaçant dans le second membre de (21) la variable d'intégration x par x_1)

ou encore

(22)
$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(\nu r)}{\nu J_1(\nu R)} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1) e^{i\nu(x-x_1)} dx_1$$

La condition $q(x) = q(-x)$ entraîne automatiquement

$$F(x) = F(-x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \varphi(-x)$$

Comme par ailleurs la fonction $\frac{J_0(\nu r)}{\nu J_1(\nu R)}$ est également paire par rapport à ν on peut écrire après des transformations élémentaires :

(23)
$$\varphi(x, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\nu r) \cos(\nu x)}{\nu J_1(\nu R)} d\nu \int_0^{\infty} F(x_1) \cos(\nu x_1) dx_1$$

ce qui dans le cas où $F(x) = \frac{s AU_2}{(\beta x)^{s+1}}$

donne à une constante près la relation (13) ci-dessus.

A ce sujet on doit noter que l'intégrale ci-dessus n'est généralement pas convergente. Toutefois, le potentiel étant défini à partir des conditions de Neumann, il l'est à une constante près et l'on peut, comme l'a fait de Boer, choisir $\varphi(0,0) = 0$

c'est-à-dire :

$$(24) \quad \varphi(x, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ur) \cos(vx) - 1}{v I_1(vR)} dv \int_0^{\infty} F(x_1) \cos vx_1 dx$$

Le choix de cette constante n'intervient d'ailleurs pas dans l'équation de la méridienne de l'onde de choc qui s'écrit immédiatement :

$$(25) \quad x_m = \frac{\varphi(0, r) - \varphi(0, 0)}{U_1 - U_2} = \frac{2}{\pi(U_1 - U_2)} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ur) - 1}{v I_1(vR)} dv \int_0^{\infty} F(x_1) \cos(vx_1) dx$$

III - RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA MERIDIENNE A LA SURFACE D'ONDE.

La relation (25) ci-dessus permet dans le cadre des hypothèses faites un calcul exact de la méridienne pour une fonction $F(x)$ donnée.

$$1) \text{ cas où } F(x) = \frac{s AU_2}{(\beta x)^{1-s}} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

La possibilité d'intégration de l'équation (25) limite dans une certaine mesure le choix de la fonction $F(x)$. Jusqu'ici le calcul exact n'a été fait que pour la valeur de $F(x)$ ci-dessus correspondant à une couche limite laminaire s'étendant de 0 à ∞ avec une épaisseur de déplacement $\delta^* = A(\beta x)^s$.

Une première intégration donne :

$$x_m = \frac{2\Gamma(s+1) \cos \frac{\pi s}{2} AU_2}{\pi \beta^{1-s} (U_1 - U_2)} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ur) - 1}{v^{s+1} I_1(vR)} dv$$

relation déjà obtenue par de Boer à partir de l'équation (13) ci-dessus et qui s'écrit encore en posant $\frac{r}{R} = k$ et $yr = x$

$$(25 a) \quad x_m = \frac{2\Gamma(s+1) AU_2 R^s}{\pi \beta^{1-s} (U_1 - U_2)} \int_0^{\infty} \frac{I_0(kx) - 1}{x^{s+1} I_1(x)} dx$$

Le calcul numérique de x_m à partir de cette relation n'offre pas de difficulté et se ramène au calcul de l'intégrale et à la détermination du

coefficient A, les autres paramètres se déduisant des équations classiques de l'onde de choc.

a) calcul de l'intégrale
$$\int_0^{\infty} \frac{I_0(kx) - 1}{x^{s+1} I_1(x)} dx$$

L'intégration directe n'a pas été obtenue mais un calcul numérique peut se faire aisément :

- soit par la méthode des résidus : on obtient immédiatement :

$$(26) \quad \int_0^{\infty} \frac{I_0(kx) - 1}{x^{s+1} I_1(x)} dx = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(k\beta_n) - 1}{\beta_n^{s+1} J_0(\beta_n)}$$

où β_n est ici la racine $n^{\text{ième}}$ de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

- soit directement en partageant l'intervalle d'intégration $[0 - \infty]$ en 3 parties.

1^o) de 0 à $x_1 \leq 1$

Dans ce domaine, on peut développer en série la fonction sous le signe $\int$ et intégrer terme à terme.

On obtient en posant $\frac{x}{k} = k$

$$(27) \quad S_1 = \frac{k \cdot x^{1-s}}{2} \left[\frac{1}{1-s} + \frac{k^2 - 2}{2^4} \cdot \frac{x^2}{3-s} + \frac{2(k^4 - 3) - 9(k^2 - 2)}{2^7 \cdot 3^2} \cdot \frac{x^4}{5-s} + \dots \right]$$

La série est très rapidement convergente même pour $x = 1$

2^o) x_1 à x_2 ($x_2 \sim 10$ par exemple)

Le calcul revient à une intégration numérique classique à laquelle on peut appliquer les méthodes habituelles (interpolation polynomiale par exemple).

3^o) de x_2 à ∞

Le développement asymptotique de :

$$\frac{I_0(kx) - 1}{x^{1+s} I_1(x)}$$

est :

$$(28) \quad \frac{e^{(k-1)x}}{x^{1+s} \cdot \sqrt{k}} \left[1 + \frac{3 + \frac{1}{k}}{8x} + \frac{33 + \frac{6}{k} + \frac{9}{k^2}}{2 \cdot 8^2 x^2} + \frac{249 + \frac{33}{k} + \frac{27}{k^2} + \frac{75}{k^3}}{2 \cdot 8^3 x^3} + \dots \right]$$

en posant

$$(1-k)x = u$$

et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les coefficients des termes en $x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n}$ dans la parenthèse, il vient :

$$(29) \quad S_3 = \frac{(1-k)^s}{\sqrt{k}} \int_{(1-k)x_2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1+s}} \left[1 + \frac{C_1 (1-k)}{u} + \frac{C_2 (1-k)^2}{u^2} + \frac{C_3 (1-k)^3}{u^3} + \dots \right] du$$

On fait ainsi apparaître des intégrales de la forme :

$$\int_X^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\alpha}} du = \Gamma^*((1-\alpha), x)$$

où Γ^* est une des formes de la fonction factorielle incomplète.

Le calcul peut alors se faire, soit aisément à partir de tables de cette fonction, soit par développement asymptotique. Un tel développement s'obtient par intégration par parties.

On a ainsi :

$$(30) \quad \int_X^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\alpha}} du = \frac{e^{-X}}{X^{\alpha}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{X^n} + R_N \right]$$

avec R_N de l'ordre de $|X|^{-N}$

Le développement ci-dessus n'est rapidement convergent que pour des valeurs de $X \sim 10$, comme $X = (1-k)x_2$ nous voyons que pour les valeurs de k voisines de 1, il est nécessaire de choisir des valeurs de x_2 assez grandes, ce qui limite l'intérêt de la méthode si l'on ne dispose pas de tables.

Toutefois dans le cas particulier où $s = \frac{1}{2}$ la fonction incomplète se ramène aisément à la fonction d'erreur $\Theta(x)$

$$1 - \Theta(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

pour laquelle il existe de nombreuses tables (7).

b) Résultats numériques pour $s = \frac{1}{2}$

L'ensemble de nos mesures se rapportant au cas d'une couche limite laminaire, nous avons effectué le calcul numérique de l'intégrale dans le cas où $s = \frac{1}{2}$.

Ce calcul a été exécuté sur machine à partir du développement en série. Cette série n'est que lentement convergente. Il est toutefois assez facile d'obtenir une évaluation relativement précise du reste (de l'ordre de 10^{-3}). (voir calcul en annexe page 46)

Les résultats ainsi obtenus sont reportés dans le tableau suivant :

$k = \frac{r}{R}$	$\sum_{n=1}^{n=40} \frac{J_0(k \beta_n) - 1}{\beta_n^{3/2} [J_0(\beta_n)]}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(k \beta_n) - 1}{\beta_n^{3/2} [J_0(\beta_n)]}$	Calcul direct : à partir de l'intégrale.
1	0,5646	0,626	0,626
0,98	-	-	0,514
0,95	0,4415	0,4463	0,447
0,90	-	-	0,373
0,89	0,3577	0,359 (a)	-
0,85	0,3123	0,317	-
0,80	0,2662	0,271	-
0,70	0,1923	0,197	-
0,60	0,1351	0,140	-
0,50	0,0899	0,095	-
0,40	0,0548	0,068	-
0,30	0,0286	0,0335	-
0,20	0,0102	0,0151	-
0,10	- 0,00032	0,0046	-

(a) de Boer a calculé les valeurs de l'intégrale pour $k = 1$ et $k = 0,89$. Pour $k=1$ il obtient bien 0,626 alors que pour $k=0,89$, il semble qu'une erreur se soit glissée dans son calcul ($S = 0,456$ au lieu de 0,359).

Dans ce tableau, la deuxième colonne donne le résultat du calcul pour les 40 premiers termes de la série.

La colonne suivante fournit la somme de la série après évaluation du reste.

Nous y avons porté également, à titre de vérification, le résultat obtenu par le calcul direct de l'intégrale selon la méthode indiquée ci-dessus.

La correspondance des résultats confirme la précision obtenue.

c) Calcul du coefficient A

Le coefficient A qui intervient dans l'expression $\delta^* = A x^{\frac{5}{2}}$ de l'épaisseur de déplacement et qui se trouve dans l'équation (25) de la méridienne a été calculé à partir de la relation donnée par Mirels (ref. 51) pour une couche limite laminaire.

$$A = \frac{\rho_w}{\rho_1} \sqrt{\frac{2 \gamma_w}{U_1}} \quad B \cdot C_2^{0,37}$$

où B est une fonction complexe dont une expression approchée peut s'écrire dans notre cas, où le nombre de Mach est relativement faible ($M < 4$)

$$B = \frac{1,134 (1 - U_1/U_2)}{\sqrt{1 + 1,022 U_1/U_2}} \left[1 - \frac{T_r / T_2 - T_1 / T_2}{\sigma_w^{0,47 + 0,029 U_1/U_2}} \right] + \frac{1,569}{\sqrt{1 + 0,933 U_1/U_2}} \cdot \frac{(U_1/U_2 - 1)^2}{\sigma_1^{0,045 (U_1/U_2 - 1)}} \cdot \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2$$

avec :

$$\frac{T_r}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} (U_1/U_2 - 1)^2 M_2^2 \cdot \sigma_w^{0,39 - 0,23 U_1/U_2}$$

avec la notation suivante :

σ_w = nombre de Prandtl à la paroi

U = vitesse de l'écoulement en dehors de la couche limite

γ = rapport des chaleurs spécifiques

$M_2 = \frac{U_2}{a_2}$ = nombre de Mach en aval de l'onde de choc.

Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux conditions en amont et en aval de l'onde de choc.

Quant à $C_2 = \frac{1,5481}{\sqrt{T_2/T_1}} - \frac{0,5481}{T_2/T_1} + 0,0028 (T_2/T_1 - 1) - 5,74(T_2/T_1 - 1)^2 \cdot 10^{-5}$,

Il s'agit d'un facteur correctif pour tenir compte de la variation du produit $\rho\mu$, variation négligée dans le calcul approché de B

ρ : masse spécifique

μ : coefficient de viscosité.

Le calcul exact pour l'air avec un nombre de Prandtl de 0,72 a été fait par Mirels, pour des nombres de Mach de l'onde de choc ≥ 4 .

La relation approchée ci-dessus donne un résultat exact selon Mirels à moins de 3 % près, et c'est elle qui a été utilisée pour le calcul des courbes théoriques des figures 12 et 13 des pages 40 et 41.

2) Cas Général

En fait la couche limite ne peut pas être représentée pour toutes les valeurs de x par une fonction unique $F(x)$ et l'on doit traiter séparément le domaine immédiatement après l'onde de choc et celui situé assez loin en aval.

a) Configuration de l'écoulement immédiatement en aval de l'onde de choc.

L'hypothèse simplifiée ci-dessus conduit à une méridienne tangente à la paroi alors que logiquement elle doit faire à peu près l'angle de Mach. Afin d'éviter cette anomalie liée au fait que, pour $x \rightarrow 0$, la fonction $F(x) \rightarrow \infty$,

de Boer (4a-4b) a proposé une représentation moins sommaire de l'écoulement dans le domaine ABCD au voisinage de la zone de contact de l'onde de choc et de la paroi.

A cet effet, partant pour ce domaine de la configuration représentée ci-contre, il a proposé de modifier les hypothèses précédentes de la façon suivante :

- la relation $\delta^* = A \sqrt{x'}$ ne s'applique qu'à partir d'une certaine distance $T + a$ de l'onde de choc.
- entre le pied de l'onde de choc et le point d'abscisse $T + a$ la couche limite peut être représentée par une distribution de puits d'intensité constante, ce qui revient à admettre que l'épaisseur de déplacement δ^* croît de façon linéaire de 0 à $A \sqrt{a}$ et fixe par là même l'origine $x = 0$ de la couche limite dans l'expression $\delta^* = A \sqrt{x'}$ à une distance $T = a$ de l'onde de choc.

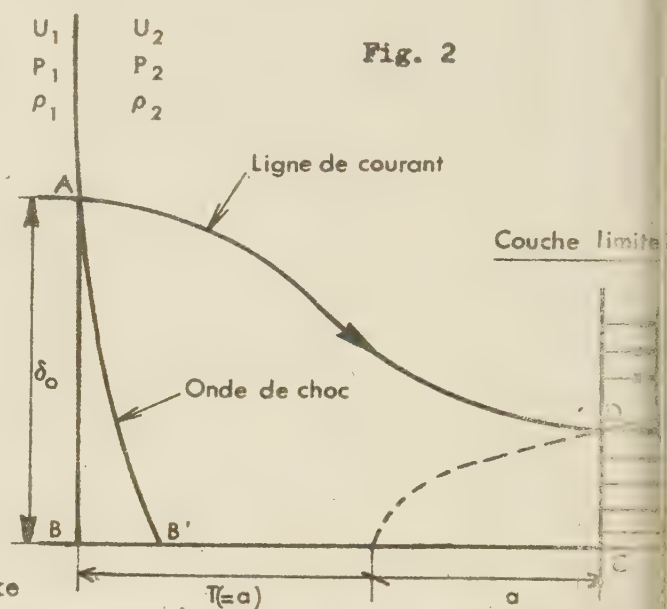


Fig. 2

La première hypothèse est très logique car la relation $\delta^* = A \sqrt{x'}$ a été établie pour une couche limite normalement développée et n'est pas valable immédiatement en aval de l'onde de choc.

La seconde hypothèse permet de satisfaire à l'équation de continuité pour l'écoulement dans le domaine A B' C D et la distribution de puits choisie à cet effet est la plus simple.

Quant à la distance $2a$, elle a été évaluée à partir de l'équation des quantités de mouvement appliquée au même domaine en admettant une composante tangentielle de contrainte à la paroi $\tau = \frac{\mu(U_1 - U_2)}{\delta_0}$ et en supposant que la distance B C est de l'ordre de $3 \delta_0$.

Malgré l'arbitraire de certains points des hypothèses précédentes, il est probable que l'ordre de grandeur de la correction ainsi apportée soit valable.

Toutefois, une certaine anomalie apparaît si l'on considère l'angle α que fait l'onde de choc avec la paroi.

On a en effet :

$$(31) \quad \cotg \alpha = \left(\frac{\partial x_m}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2}{\pi(U_1 - U_2)} \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty F(x) \cos \nu x dx$$

Dans le cas des hypothèses ci-dessus la fonction $F(x)$ peut s'écrire :

$$(32) \quad \begin{aligned} F(x) &= \frac{AU_2}{2\sqrt{a}} && \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{2a}{\beta} \\ F(x) &= \frac{AU_2}{2\sqrt{\beta}\sqrt{x-\frac{a}{\beta}}} && \text{pour } x \geq \frac{2a}{\beta} \end{aligned}$$

Une première intégration donne :

$$(33) \quad \int_0^\infty F(x) \cos \nu x dx = \frac{1}{\nu\sqrt{a}} \sin \frac{2\nu a}{\beta} + \sqrt{\frac{\pi}{2\beta\nu}} \left[\cos\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) - \sin\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) + 2 \sin\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) S\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) - 2 \cos\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) C\left(\frac{a\nu}{\beta}\right) \right]$$

S et C étant respectivement les fonctions sinus et cosinus intégral. La seconde intégration par rapport à ν fournit tout calcul fait :

$$(34) \quad \cotg \alpha = \frac{A U_2}{2\sqrt{a}(U_1 - U_2)}$$

Cette relation montre que, dans la mesure où il est possible de définir l'angle de la surface d'onde et de la paroi, cet angle est directement lié à la valeur choisie pour la distance a .

En particulier si l'on admet que l'angle α doit être égal à l'angle de Mach on obtient :

$$(35) \quad V_a = \frac{A U_2}{2(U_1 - U_2) \sqrt{M - 1}}$$

alors que de Boer, avec les hypothèses : $\tau \sim \frac{\mu(U_1 - U_2)}{\delta_0}$ et $a = 3\delta_0$, aboutit à la relation :

$$V_a = 3 \frac{\mu_1}{\rho_1 a M} \cdot (U_1/U_2 - 1) \cdot \frac{\delta^*}{\gamma^*} \cdot \frac{1}{A} \quad (a)$$

Or, pour des nombres de Mach de l'onde de choc compris entre 3 et 4, ces relations sont dans un rapport de 10 environ.

Ces quelques observations montrent que l'étude de la forme de l'onde de choc immédiatement au voisinage de la paroi devrait être faite en tenant compte de la structure du front de choc.

Malheureusement, il s'agit d'un problème très difficile dont la seule étude est celle de M. SICHEL (ref. 6) dans le cas de choc très faible (nombre de Mach $< 1,2$).

Dans ce cas particulier, où la zone de choc est relativement étendue et où en conséquence la validité des équations de NAVIER STOKES pour la mise en équation du problème peut être admise, Sichel a donné une solution approchée, obtenue par développement en série des équations de NAVIER STOKES en fonction du paramètre $(M^* - 1)$ qui est très faible. Le résultat obtenu valable seulement en écoulement plan, tend asymptotiquement lorsque l'on s'éloigne de la paroi vers celui déjà acquis, avec les hypothèses ci-dessus, par Hartmann.

b) Extension et évolution de la couche limite.

Dans le calcul fait ci-dessus pour x_m , il est supposé que la couche limite s'étend jusqu'à l'infini.

(a) γ^* est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite.

En fait la couche limite a une longueur finie L (a) et l'intégrale de $F(x)$ doit être prise entre 0 et L .

Toutefois la valeur de $\int_L^\infty F(x) dx$ est très faible et peut être négligée. En effet, si l'on se base sur le résultat obtenu par de Boer (4a-4b) dans le cas d'une onde de choc se déplaçant entre 2 plans parallèles, on trouve qu'à une distance L de l'ordre du rayon du tube, l'erreur ainsi introduite est inférieure à 1 %.

Comme habituellement et notamment dans le cas des mesures que nous avons faites, la distance entre la surface de contact et l'onde de choc est de l'ordre de plusieurs diamètres, l'erreur est absolument négligeable.

Une autre source d'erreur dans le calcul précédent provient du fait que la couche limite n'est que partiellement laminaire. En effet, sauf à basse pression, la couche limite devient turbulente à une distance x_L de l'onde de choc de l'ordre de (ref.7,8)

$$x_L = \frac{\nu_w \cdot Re_T}{U_2(U_1/U_2 - 1)^2}$$

où ν_w est le coefficient de viscosité cinématique à la paroi et Re_T est le nombre de Reynolds de transition $\sim 10^6$.

Dans ce cas, la fonction $F(x)$ est à considérer avec $s = \frac{1}{2}$ entre 0 et x_L et $s = \frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ entre x_L et L .

En fait pour la même raison que précédemment les corrections ainsi apportées sont négligeables sauf à pression élevée et à faible nombre de Mach où la transition se produit presque immédiatement en aval de l'onde de choc.

c) Phénomènes de relaxation.

Enfin, nous signalerons en terminant une autre cause d'erreur mentionnée par de Boer (4a-4b) dans le cas d'une onde de choc très intense ($M \geq 10$).

(a) Indépendamment du fait que la couche limite ne saurait avoir une épaisseur supérieure au rayon du tube et que les vitesses de perturbation sont par hypothèse, très petites devant U_1

Dans ce cas, l'équilibre thermodynamique du gaz met un certain temps à s'établir et il se forme en aval de l'onde de choc une "zone de relaxation" où la quantité AU_2 dans l'expression de $F(x)$ ne peut plus être considérée comme constante.

On a pour cette zone une variation continue des paramètres caractéristiques (température, densité...) depuis les valeurs correspondant au gaz parfait jusqu'à celles relatives au gaz en équilibre thermodynamique.

La complexité du phénomène résultant des temps de relaxation variables pour chaque espèce de molécule et chaque degré de liberté rend pratiquement impossible une formulation exacte.

Une évaluation approchée de la flèche maximum de l'onde de choc a été faite par de Boer dans le cas de 2 parois parallèles pour une couche laminaire ($s = \frac{1}{2}$) en adoptant pour la fonction $F(x)$ la relation :

$$F(x) = \frac{s A_r U_{2r}}{x^{1-s}} + s e^{-\frac{x}{\lambda}} (A_i U_{2i} - A_r U_{2r})$$

où λ = distance de relaxation

r = indice se rapportant au gaz réel en équilibre thermodynamique

i = indice se rapportant au gaz parfait.

CHAPITRE II

A P P A R E I L L A G E E T T E C H N I Q U E S D E M E S U R E

I - TUBE DE CHOC ET EQUIPEMENT.

Le tube de choc dont nous disposons à l'I.N.S.A. est essentiellement constitué d'un tube cylindrique de 15 m de long en 10 sections de 1,50 m et de 164,2 mm de diamètre intérieur.

La chambre haute pression, formée par un élément de tube, permet de supporter une pression maxima de l'ordre de 50 kg/cm^2 .

Le diaphragme de séparation entre la partie haute pression et la partie basse pression est, pour toutes les mesures rapportées ici, constitué par une membrane en aluminium recuit de 0,2 mm d'épaisseur.

L'équipement du tube comprend :

- d'une part, un ensemble d'appareillage électronique : chronomètre, oscilloscope et amplificateurs.
- d'autre part, un dispositif de mesure statique des pressions et des températures, permettant de connaître le plus exactement possible, les conditions initiales.

En particulier pour les mesures de pression, nous avons utilisé, côté haute pression, un manomètre à mercure et côté basse pression, une jauge de Mc Leold à taux de compression variable en liaison avec un manomètre à huile.

Les mesures de pression aval ont pu ainsi être déterminées avec une précision meilleure que 0,5 % .

II - PRINCIPE DE MESURE DE LA COURBURE DE L'ONDE DE CHOC

La mesure de la courbure de l'onde de choc a été faite à l'aide de sondes de platine placées à l'extrémité du tube selon un diamètre comme le montre la figure ci-contre.

Lors de l'arrivée de l'onde de choc, la brusque élévation de température produit à chaque sonde un signal enregistré sur oscilloscope.

Les photographies de la page 39 donnent un aspect des oscillogrammes ainsi obtenus.

On constate que les signaux en provenance de 2 sondes placées non symétriquement par rapport à l'axe sont légèrement décalés dans le temps.

La mesure de ce décalage permet alors, connaissant la vitesse de l'onde de choc, d'en déduire la forme.

Le type de détecteur choisi nous a semblé être le mieux adapté au domaine de mesure considéré. Il possède en effet une excellente résolution tant spatiale que temporelle et est insensible aux vibrations qui se produisent toujours à la rupture de la membrane.

Le choix du détecteur est d'ailleurs assez limité. Les détecteurs optiques (a) ont une résolution spatiale assez faible et sont difficilement utilisables à basse densité. Les détecteurs piezoélectriques sont également d'un

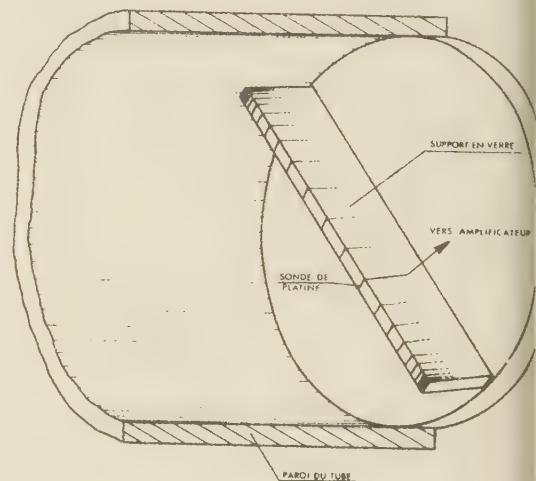


Fig. 3

(a) voir à ce sujet l'étude originale faite par de Boer (ref. 4a) à l'aide d'un système strioscopique dont le signal lumineux est reçu sur un tube photomultiplicateur et enregistré sur oscilloscope.

emploi délicat à basse pression. Par ailleurs leur temps de réponse de l'ordre de la microseconde et surtout leur dimension de l'ordre de quelques millimètres, limitent leur résolution. (ref.3)

Enfin les détecteurs basés sur la variation de conductibilité ne sont utilisables qu'à des nombres de Mach très élevés.

III - DETECTEURS A FILM DE PLATINE.

1) description

Les films de platine utilisés comme détecteurs ont été obtenus selon une méthode classique de dépôt de peinture (a) sur un support en verre suivi d'une cuisson à une température d'environ 600° C. La couche ainsi obtenue a une épaisseur de l'ordre de 800 à 1000 Å.

Chaque sonde, d'une largeur de 0,2 à 0,4 mm et d'une longueur de 5 mm environ, présente une résistance électrique de l'ordre de 800 à 1000 Ω.

Les sondes ont été disposées sur leur support comme le montre le dessin ci-dessus. Elles ont été peintes en faisant tourner la pièce autour de son axe ce qui a permis de leur donner une forme circulaire représentant sensiblement l'intersection de la surface d'onde avec un plan normal à l'axe du tube.

Des essais préliminaires nous ayant donné approximativement l'allure du front de choc, les différentes sondes ont été placées à des distances telles que les points relevés soient régulièrement répartis sur une méridienne à la surface d'onde.

Le support sur lequel est déposé le film, parfaitement plan à ± 2 microns près, est monté de façon à être rigoureusement perpendiculaire à l'axe du tube.

(a) la peinture utilisée est un résinate de platine.

La vérification de ce calage est faite en s'assurant que les signaux en provenance de 2 sondes placées à égale distance de l'axe du tube sont simultanés.

En fait, nous avons constaté (oscillogramme n° 5 page 39) de légers écarts tantôt dans un sens tantôt dans l'autre provenant d'une légère dissymétrie de l'onde de choc, dissymétrie qui a probablement son origine dans le processus de formation de l'onde de choc elle-même.

La rupture de la membrane n'est ni instantanée ni parfaitement symétrique et il semble que, même à une distance de l'ordre de 80 diamètres, l'onde conserve des traces de sa naissance.

2) Caractéristiques dynamiques - Temps de réponse.

Lors de l'arrivée de l'onde de choc, les sondes sont brusquement soumises à un flux de chaleur qui demeure sensiblement constant jusqu'à l'arrivée de la surface de contact.

En effet, chaque point du film peut être considéré comme un point d'arrêt et le flux de chaleur est alors proportionnel à la différence entre l'enthalpie d'arrêt h_o du gaz en aval de l'onde de choc et celle h_f correspondant à la température du film. Cette dernière ne variant, pendant la durée de la mesure, que de quelques dixièmes de degré, et $h_o \gg h_f$, nous pouvons considérer $(h_o - h_f)$ comme constante, d'où un flux de chaleur q pratiquement constant.

L'élévation de température T en fonction du temps t se ramène alors à un problème classique de conduction thermique dont le résultat est (ref.9)

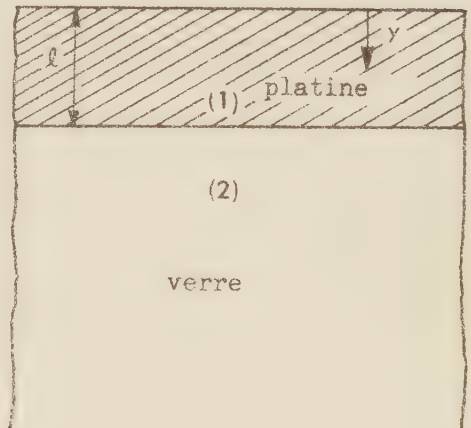
$$T = 2q \sqrt{\frac{t}{\pi k_1 \rho_1 C_{p1}}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4K_1 t}} - q \frac{y}{k_1} \left[1 - \Theta \left(\frac{y}{2\sqrt{K_1 t}} \right) \right]$$

$$+ 2q \sqrt{\frac{t}{\pi k_1 \rho_1 C_{p1}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \left[e^{-\frac{(2nl+y)^2}{4K_1 t}} + e^{-\frac{(2nl-y)^2}{4K_1 t}} \right]$$

$$- \frac{q}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \left\{ (2nl+y) \left[1 - \Theta \left(\frac{2nl+y}{2\sqrt{K_1 t}} \right) \right] + (2nl-y) \left[1 - \Theta \left(\frac{2nl-y}{2\sqrt{K_1 t}} \right) \right] \right\}$$

avec

$$\sigma = \frac{\sqrt{\frac{k_1 \rho_1 C_{p1}}{k_2 \rho_2 C_{p2}}} - 1}{\sqrt{\frac{k_1 \rho_1 C_{p1}}{k_2 \rho_2 C_{p2}}} + 1}$$



et la notation suivante :

t = temps

T = température du film à la cote y

q = flux de chaleur

k = coefficient de conductivité thermique

ρ = masse spécifique

C_p = chaleur spécifique à pression constante

K = coefficient de diffusivité thermique

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement au platine et au verre.
La relation ci-dessus peut s'écrire sous forme adimensionnelle en posant

$$Y = \frac{k T}{q \ell} \quad \text{et} \quad X = \frac{K_1 t}{\ell^2}$$

On obtient alors l'une ou l'autre des relations suivantes selon que l'on considère comme représentative de la température mesurée celle de la surface du film ou celle d'un plan médian.

a) $y = 0$

$$Y = 2\sqrt{\frac{X}{\pi}} \left[1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n e^{-\frac{n^2}{X}} \right] - 4 \sum_{n=0}^{\infty} n \sigma^n \left[1 - \Theta\left(\frac{n}{\sqrt{X}}\right) \right]$$

b) $y = \ell/2$

$$\begin{aligned} Y = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{X} \cdot e^{-\frac{1}{16X^2}} - \frac{1}{2} \left[1 - \Theta\left(\frac{1}{4\sqrt{X}}\right) \right] \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{X} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left[e^{-\frac{(2n+\frac{1}{2})^2}{4X}} + e^{-\frac{(2n-\frac{1}{2})^2}{4X}} \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left\{ \left(2n+\frac{1}{2}\right) \left[1 - \Theta\left(\frac{2n+\frac{1}{2}}{2\sqrt{X}}\right) \right] + \left(2n-\frac{1}{2}\right) \left[1 - \Theta\left(\frac{2n-\frac{1}{2}}{2\sqrt{X}}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

En fait en raison de la conductibilité élevée du platine et de la faible épaisseur du film, les résultats obtenus avec l'une ou l'autre de ces relations ne diffèrent que très peu sauf au voisinage immédiat de l'origine $X = 0$. Ainsi alors que pour $X = 1$ on a une différence de 50 %, à $X = 16$ l'écart est inférieur à 3 % et devient ensuite tout à fait négligeable.

Afin de mettre en évidence l'influence de l'épaisseur du film sur le temps de réponse, nous avons, à partir des relations précédentes, tracé ci-dessous les courbes représentant la variation de température en fonction du temps. Dans notre cas (platine sur verre)

nous avons :

$$\frac{k_1 \cdot \rho_1 \cdot C_{p1}}{k_2 \cdot \rho_2 \cdot C_{p2}} = 97,5$$

$$k_2 \cdot \rho_2 \cdot C_{p2}$$

$$\text{et } K_1 = 0,244 \text{ cm}^2/\text{s}$$

On voit nettement tout l'intérêt que présente la réduction de l'épaisseur du film du point de vue temps de réponse.

Nous noterons toutefois qu'une réduction de 1000 à 500 Å de l'épaisseur n'entraînerait qu'une augmentation de 20 % environ du

signal au temps $t = 100 \text{ ns}$, alors qu'en contrepartie la fragilité du film et sa résistance électrique seraient nettement accrues.

Par ailleurs, l'obtention de couches aussi minces, nécessiterait d'avoir recours à la technique de l'évaporation sous vide. Cette méthode, dans le cas présent où de nombreuses sondes doivent être placées sur un support relativement grand, s'est avérée d'une réalisation bien moins commode que le simple dépôt d'une couche de peinture.

IV - SIGNAUX DELIVRES PAR LES SONDES - PREAMPLIFICATION

Les signaux délivrés par les sondes sont, dans notre cas, très faibles. En effet, à basse densité, le coefficient de transfert de chaleur, sensiblement proportionnel à la racine carrée de la densité, est peu important et l'élévation de température atteint à peine 1/10 de degré au bout de $1 \mu\text{s}$.

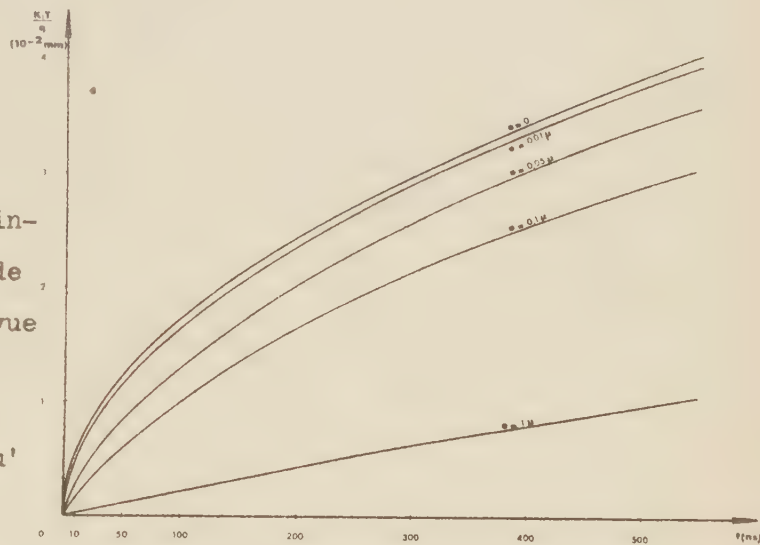


Fig. 4

Les sondes étant alimentées à courant sensiblement constant i_0 selon le schéma ci-contre nous voyons que la variation Δe de tension aux bornes du film est

$\Delta e = i_0 \cdot \Delta r$ où Δr est la variation de résistance due à l'augmentation de température.

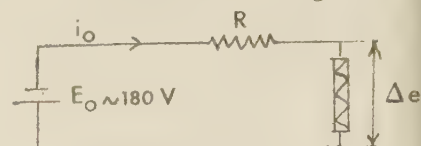


Fig. 5

Or, i_0 ne peut être augmenté au-delà d'une certaine valeur si l'on ne veut pas courir le risque d'une détérioration du film (a).

Dans ces conditions, le niveau des signaux disponibles aux bornes des sondes est, aux plus faibles pressions utilisées ici de l'ordre d'une cinquantaine de microvolts au bout d'un temps d'environ 100 ns.

Compte tenu des caractéristiques de l'oscilloscope utilisé, une exploitation correcte des signaux nécessite une préamplification de l'ordre de 70 et un bruit de fond qui soit nettement inférieur à $50 \mu \text{V}$.

Comme d'autre part il est souhaitable, pour la précision des mesures, conserver aux signaux un front raide, le temps de montée doit rester suffisamment court. Or, le temps de montée de l'oscilloscope est de 15 ns. Donc si l'on veut une résolution du même ordre de grandeur il serait souhaitable d'avoir un temps de montée du préamplificateur d'une dizaine de ns. Malheureusement, paraît très difficile d'obtenir un temps aussi court en conservant au bruit de fond un niveau suffisamment faible, et les études que nous avons consacrées à la mise au point de ce préamplificateur ne nous ont pas permis d'abaisser au-dessous de $30 \mu \text{V}$ (valeur de crête) le bruit de fond, ceci pour une bande passante correspondant à un temps de montée de l'ordre de 30 ns.

(a) Il semble d'ailleurs que l'accroissement de l'intensité au-delà d'une certaine valeur (15 mA) provoque une légère augmentation du bruit de fond.

Le schéma ci-joint page 42 montre le type de préamplificateur adopté, l'étage d'entrée est une pentode spéciale à très grande pente 50 mA/Volt et à très faible souffle, 110 Ω seulement de résistance équivalente de bruit.

L'utilisation de montage cascode, avec des doubles triodes spéciales telles que les E 288c, ne nous ^ant pas permis d'obtenir un meilleur rapport signal-bruit. Ce montage présente toutefois un effet microphonique bien plus faible que celui résultant de l'utilisation de pentode à grande pente. Ce phénomène n'étant cependant pas gênant pour notre utilisation, nous avons conservé le montage à pentode qui permet d'améliorer légèrement le rapport signal-bruit.

Le reste du schéma n'appelle pas d'observation particulière et s'inspire des techniques bien connues des amplificateurs à large bande. Signalons également la possibilité que présente le montage où les étages d'entrée sont doubles, de superposer les signaux en provenance de 2 sondes.

Ce dispositif, bien que présentant l'inconvénient d'augmenter le bruit de fond d'environ 50 % (coefficient $\sqrt{2}$), nous a permis de relever simultanément 4 points du profil de l'onde de choc. L'oscillogramme n° 5 de la page 39 montre l'allure des signaux ainsi obtenus.

Le même résultat aurait pu être acquis en montant 2 sondes en série mais avec l'inconvénient de ne pouvoir, pour chaque sonde, ajuster indépendamment l'intensité du courant i_o .

Les signaux enregistrés montrent que le temps t qui sépare 2 signaux peut être connu à environ 10 ns près. Toutefois, cette précision que l'on peut obtenir dans la mesure des distances sur les clichés oscilloscopiques est limitée par le défaut de régularité et de linéarité de la vitesse de balayage qui même après une mise au point spéciale des bases de temps utilisées reste de l'ordre de 1 % (le constructeur donne 1 à 3 %) ce qui se traduit par une erreur d'à peu près 10 ns pour un intervalle de temps de 1 μ s.

Compte tenu de ces observations, nous avons considéré comme suffisantes les caractéristiques du préamplificateur dont l'amélioration ne se justifiera que par une amélioration simultanée de l'appareillage d'enregistrement.

Signalons enfin qu'il conviendrait corrélativement de réduire les dimensions transversales des sondes afin que, notamment près des parois, le temps mis par l'onde de choc pour atteindre toute la surface du film reste aux faibles nombres de Mach nettement inférieur à 10 ns.

V - MESURE DE LA VITESSE DE L'ONDE DE CHOC.

L'interprétation des résultats obtenus à chaque essai nécessite la connaissance des paramètres caractéristiques de l'onde de choc correspondante.

Comme la mesure de la vitesse de l'onde, outre son intérêt propre, permet de connaître de façon précise les autres paramètres (rapport de pression, température...) nous avons placé à cet effet 2 sondes (film de platine) distantes de 1,205 m, qui, au passage de l'onde de choc, provoquent le déclenchement et l'arrêt du chronomètre électronique. Comme le seuil de déclenchement du chronomètre est d'environ une vingtaine de volts, les signaux sont appliqués aux entrées par l'intermédiaire de deux amplificateurs ayant chacun un gain de l'ordre de 10^5 et un temps de montée d'environ 0,2 μ s. Le schéma en est donné page 43.

La deuxième sonde, placée quelques millimètres en amont de celles affectées aux mesures de courbure, provoque également le déclenchement du balayage de l'oscilloscope. Un dispositif électronique de retard permet un cadrage précis des signaux sur l'écran de l'oscilloscope. Le schéma de la page 42 donne la description du circuit utilisé à cet effet. On note qu'il s'agit d'un basculeur monostable classique ; sa seule particularité est la diode tunnel placée à l'entrée qui permet d'obtenir un retard pratiquement indépendant du niveau

et de la forme des signaux appliqués. Le retard est continuellement réglable entre 0,5 et 50 μ s. (a)

Les mesures faites pour des nombres de Mach compris entre 3 et 4 environ conduisent à des mesures de temps allant de 900 μ s à 1200 μ s. La précision est de $\pm 1 \mu$ s, c'est-à-dire de l'ordre de 0,1 %.

La mesure simultanée de la vitesse sur une base de 0,20 m immédiatement en amont des sondes de mesure, nous a par ailleurs montré que l'affaiblissement de l'onde de choc était négligeable (diminution de vitesse < 1 %).

(a) l'étage d'entrée a pour but de fournir des signaux de polarité et d'amplitude convenables.

CHAPITRE III

R E S U L T A T S E X P E R I M E N T A U X

I - CONDITIONS DE MESURE ET DEPOUILLEMENT DES CLICHES.

Trois séries de mesures ont été faites dans les conditions suivantes :

	: 1 ^{ère} série :	2 ^{ème} série :	3 ^{ème} série
Pression en amont de l'onde de choc	:	:	:
en mm de mercure.....	: 0,196	: 0,81	: 3,70
Température moyenne en amont de	:	:	:
l'onde de choc en ° C.....	: 22	: 22	: 22
Nombre de Mach moyen de l'onde de	:	:	:
choc.....	: 3,80	: 3,40	: 2,9

Dans chaque série 150 mesures environ ont été faites, ce qui représente pour chaque point relevé, une dizaine de valeurs. Le nombre assez grand de mesures faites en chaque point a eu pour but de réduire les erreurs résultant de la légère inclinaison assez souvent constatée de la surface d'onde par rapport à l'axe du tube.

En ce qui concerne les mesures elles-mêmes, nous avons, d'une façon générale enregistré simultanément les signaux en provenance de 2 sondes, le gain de l'amplificateur étant ajusté de façon à obtenir des signaux de même amplitude, l'amplitude variant d'ailleurs assez peu d'une sonde à l'autre.

Le dépouillement des clichés a été effectué à partir de la projection très agrandie (8 ns/mm) du négatif pris lors de chaque essai. Pour cela au moyen d'un support transparent, on a déterminé la translation à faire subir à l'une des traces pour l'amener en coïncidence avec l'autre.

La même méthode a été employée dans le cas où 4 signaux étaient enregistrés simultanément. Toutefois les mesures étaient ici un peu moins précises en raison de l'impossibilité d'avoir des formes de signaux rigoureusement identiques.

Les résultats de ces mesures ont été reportés sur les figures des pages 40 et 41.

Les courbes de la figure 11 donnent le relevé expérimental des méridiennes de la surface d'onde pour les 3 séries de mesures effectuées. Ces courbes font apparaître un angle de raccordement non nul avec la paroi. En fait la dernière sonde se trouvant à environ 0,2 mm de la paroi le tracé a dû être extrapolé pour les valeurs de $\frac{r}{R} > 0,997$ (courbes en pointillés). Il est de ce fait difficile d'évaluer l'angle de la méridienne avec la paroi. Toutefois si l'on admet la validité de l'extrapolation faite, il semble que cet angle soit, en général, un peu supérieur à l'angle de Mach.

Sur la figure 12 nous avons comparé la forme des méridiennes ainsi obtenues à la forme théorique telle qu'elle résulte de l'équation (25a). On constate une bonne coïncidence sauf au voisinage de la paroi et pour les valeurs de $\frac{r}{R}$ comprises entre 0,5 et 0,8.

L'écart au voisinage de la paroi est normal puisque la courbe théorique n'est pas valable dans ce domaine. Quant au léger écart constaté pour $0,5 < \frac{r}{R} < 0,8$ il est difficile d'en donner à priori une raison précise. On peut toutefois noter d'une part, qu'il est de l'ordre de l'erreur expérimentale (voir calcul ci-après) et d'autre part, que la courbe théorique est basée sur des hypothèses approchées.

Enfin, sur la figure 13, nous avons comparé les flèches maxima mesurées au calcul théorique. La relation (25a) montre que la flèche est fonction de la position et du nombre de Mach. En fait ce dernier paramètre intervient assez peu et il est pratiquement possible de tracer une courbe unique.

Sur cette même figure nous avons également indiqué la correction apportée par de Boer (ref. 4) pour tenir compte de la forme particulière de la couche limite dans la zone de contact de l'onde de choc avec la paroi. La correction apportée résulte de la relation suivante où θ est la flèche maxima obtenue en faisant $k = 1$ dans l'équation (25a).

$$\theta_{\text{cor}} = \theta \left(1 - 1,52 \left(\frac{a}{\beta R} \right)^{\frac{1}{2}} + 0,795 \left(\frac{a}{\beta R} \right) - 1,15 \left(\frac{a}{\beta R} \right)^{5/2} \right)$$

Bien que cette relation ait été établie pour une onde de choc se déplaçant entre deux plans parallèles on voit qu'elle tend à améliorer la correspondance entre les points théoriques et expérimentaux.

Il subsiste néanmoins un léger écart dû en partie à une certaine imprécision des mesures (a) en partie à l'insuffisance de la théorie.

II - PRECISION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.

La principale source d'erreur découle de l'impossibilité où nous sommes d'enregistrer simultanément les signaux en provenance de toutes les sondes et par suite, de la nécessité d'effectuer plusieurs essais dans des conditions qui ne sont **jamais identiques**.

Il en résulte une dispersion des mesures dont la cause essentielle est l'inclinaison de l'onde de choc par rapport à l'axe du tube. Il semble bien qu'il s'agisse d'une inclinaison d'**ensemble** de la surface d'onde plutôt que d'une déformation partielle. En effet, dans les essais que nous avons effectués avec 2 sondes placées symétriquement par rapport à l'axe du tube, la moyenne des mesures restait remarquablement constante à une dizaine de nanosecondes près, sur un temps de l'ordre de $0,5 \mu s$ alors que les écarts atteignaient parfois plusieurs centaines de nanosecondes (voir oscillogramme n° 5 page 39 où ce phénomène est particulièrement accusé).

(a) en particulier dans l'extrapolation faite pour obtenir le point de contact de l'onde de choc avec la paroi.

Ce phénomène pouvant être considéré comme entièrement aléatoire, l'écart entre la moyenne des mesures et la valeur réelle est distribué suivant la loi de GAUSS et une estimation de l'erreur commise peut ainsi être faite.

Toutefois, le nombre de mesures en chaque point étant malgré tout assez faible ($N \sim 10$), il est préférable d'adopter pour l'écart réduit "t" la distribution de Student-Fisher.

Pour un ensemble de 10 mesures, le calcul appliqué aux points les plus éloignés de l'axe, donne une erreur relative moyenne de 3 % avec une probabilité de dépassement inférieur à 1/100.

La précision diminue légèrement à mesure que l'on se rapproche du centre, par suite de la diminution de l'écart entre les signaux.

Un calcul d'erreur analogue au précédent montre que celle-ci s'établit aux environs de 5 %.

III INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE L'ONDE DE CHOC.

Aux pressions considérées, l'onde de choc a une épaisseur non négligeable vis à vis de la flèche maxima. Il en résulte que les signaux enregistrés, au lieu de présenter en A (voir figure 6a ci-contre) un point anguleux, comme ce serait le cas pour une onde d'épaisseur nulle (a) ont l'aspect représenté sur la figure 6 b.

Cette modification dans la forme des signaux apparaît nettement sur les oscillogrammes de la page 39 .

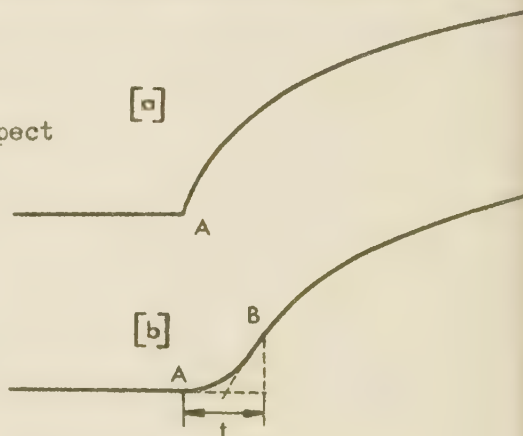


Fig. 6

(a) En négligeant le temps mis par l'onde de choc pour "atteindre" toute la surface de la sonde. Ce temps est de l'ordre de la nanoseconde pour les sondes situées au voisinage de l'axe.

En particulier si, sur le premier cliché, pris à une pression de l'ordre de 70 mm de Hg, on retrouve bien la forme théorique, mis à part le léger "arrondi" dû au temps de réponse non nul du système d'enregistrement, les clichés suivants montrent nettement l'accentuation du phénomène au fur et à mesure que la pression diminue.

Cette modification de la forme des signaux est directement liée à "l'épaisseur" de l'onde de choc, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous où nous avons porté sur la courbe théorique donnant l'épaisseur de l'onde de choc, en fonction de la pression, les points représentant la distance $\delta = U_1 t$ (voir figure 6b - le point B est le point d'inflexion de la courbe).

Ce phénomène, d'autant plus marqué que la pression est plus faible, limite de façon sensible la précision des mesures à basse densité.

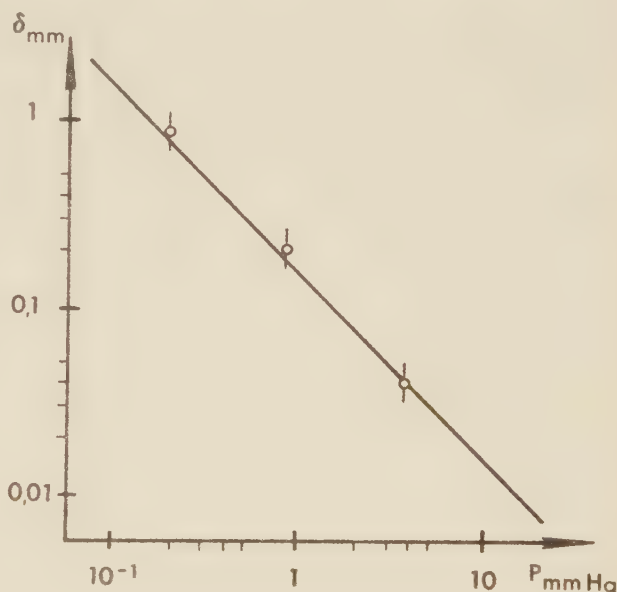


Fig. 7

Par ailleurs, il introduit une cause d'erreur supplémentaire dans la mesure où "l'épaisseur" de l'onde de choc n'est pas uniforme.

Dans notre cas où le paramètre caractéristique est l'enthalpie d'arrêt du gaz, l'épaisseur (a) est théoriquement un peu plus grande près de la paroi qu'au centre.

En fait, il ne nous a pas été possible de mettre en évidence de différences systématiques entre les signaux fournis par les sondes situées près de l'axe et celles placées au voisinage de la paroi.

(a) basée par exemple sur la pente maxima du profil d'enthalpie ^{d'arrêt} au travers de l'onde de choc.



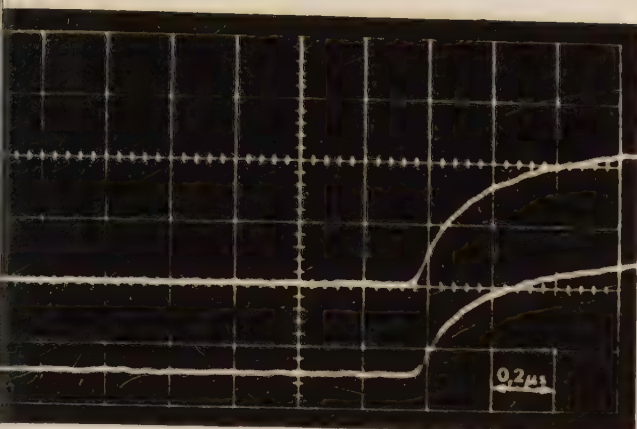
C O N C L U S I O N

L'appareillage expérimental décrit dans ce travail nous a permis d'obtenir un relevé relativement précis du profil de l'onde de choc et par là même d'apporter une confirmation de la théorie proposée par Hartunian et développée par de Boer.

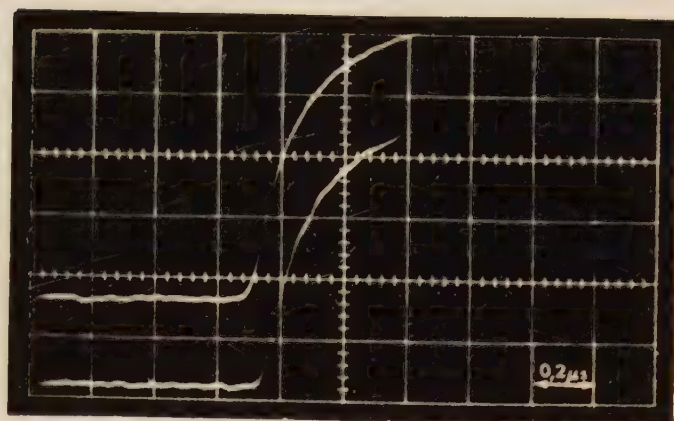
Nous avons pu ainsi montrer que, si cette théorie permet de prévoir de façon satisfaisante la forme de l'onde de choc, elle ne rend toutefois qu'imparfaitement compte de ce qui se passe au voisinage immédiat de la paroi.

L'écart ici constaté entre la théorie et l'expérience, principalement dû aux hypothèses simplificatrices faites dans la représentation du domaine fluide situé immédiatement en aval du choc, doit pouvoir être réduit par une étude plus complète de l'écoulement dans la zone de contact de l'onde de choc avec la paroi.

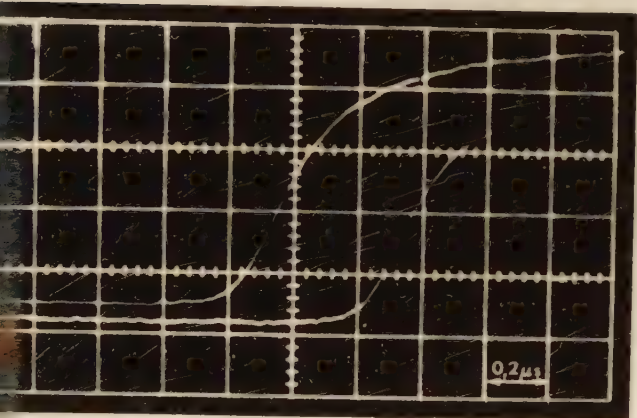
Parallèlement, nous pensons qu'il serait intéressant de poursuivre l'étude expérimentale de façon à mettre en évidence l'influence de divers paramètres caractéristiques : nombre de Mach, nature du gaz, rugosité des parois....



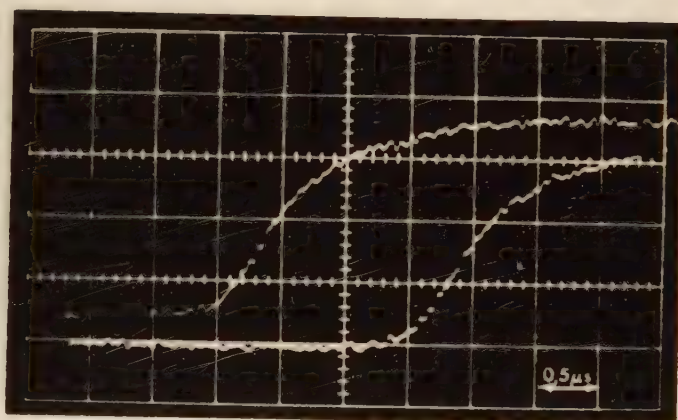
N^o 1
[P = 70 mm Hg, M = 18]



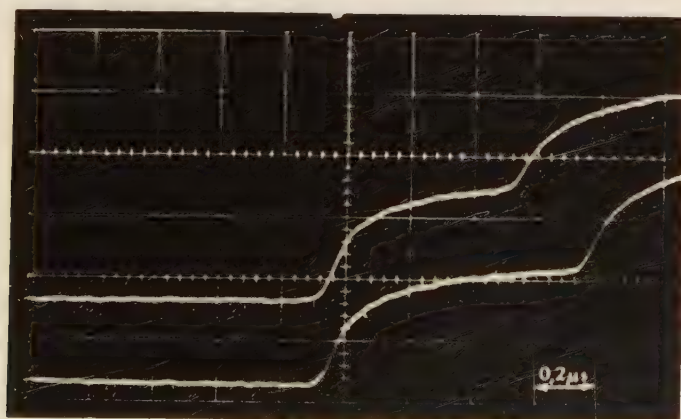
N^o 2
[P = 37 mm Hg, M = 29]



N^o 3
[P = 0.81 mm Hg, M = 34]



N^o 4
[P₁ = 0.196 mm Hg, M = 39]



N^o 5
[P₁ = 3.7 mm Hg, M = 2.9]

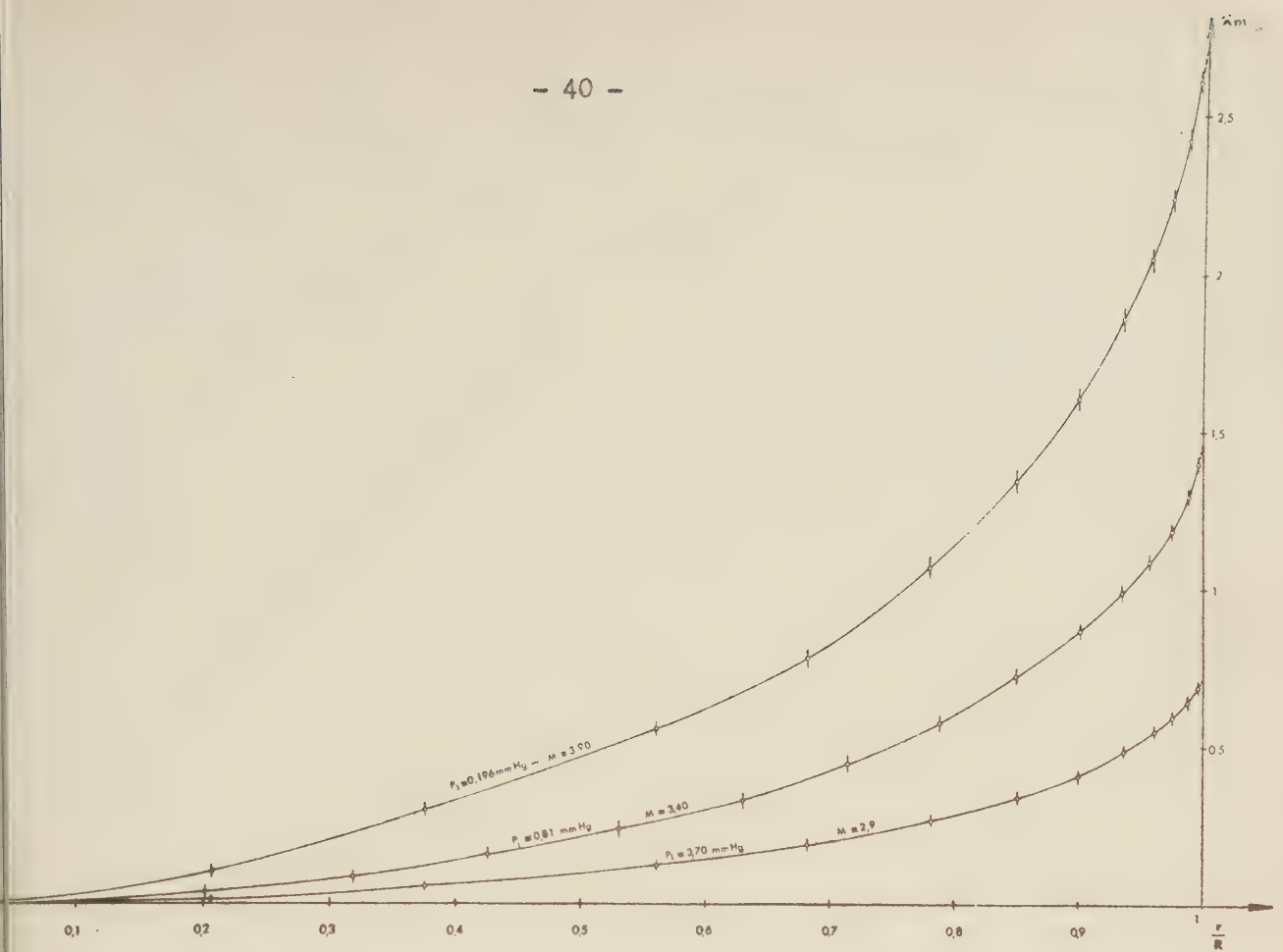


Fig. 11 - Méridiennes de la surface de l'onde de choc - Points expérimentaux relevés.

P_1 = PRESSION AMONT

$M = M_0$ DE MACH DE L'O.C. $\left[M = \frac{V}{a_1} \right]$

V = VITESSE DE L'O.C.

a_1 = VITESSE DU SON DU MILIEU AMONT

○ $\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 3.70 \text{ mmHg} \\ M = 2.9 \end{array} \right.$

△ $\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 0.81 \text{ mmHg} \\ M = 3.40 \end{array} \right.$

× $\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 0.196 \text{ mmHg} \\ M = 3.90 \end{array} \right.$

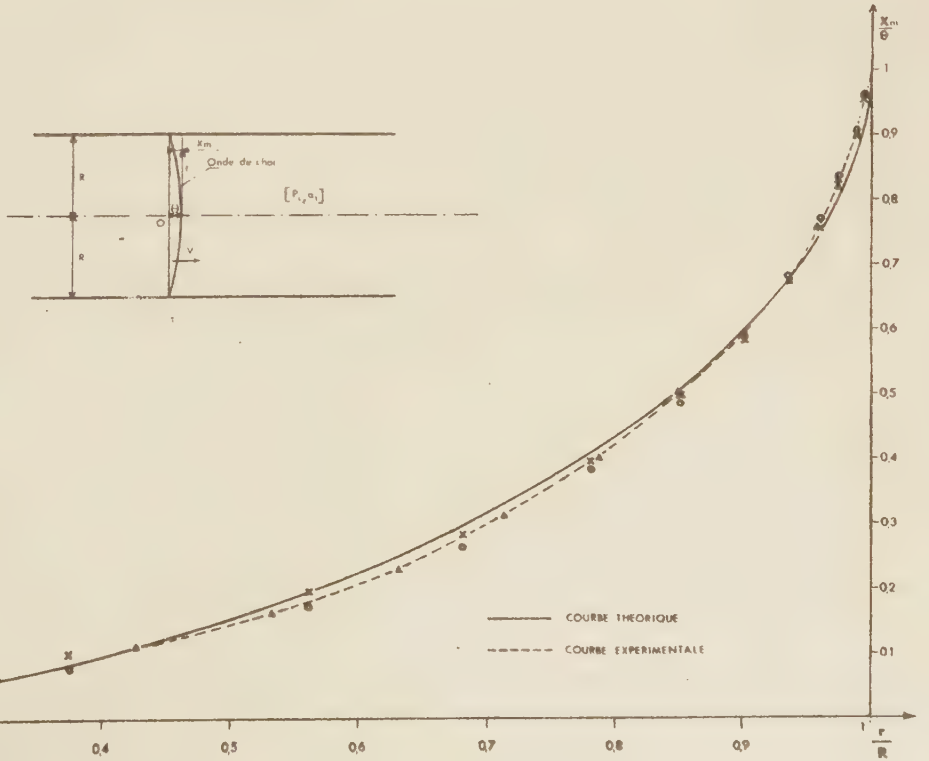


Fig. 12 - Courbe théorique résultant de l'équation (25 a) - comparaison avec les résultats expérimentaux.

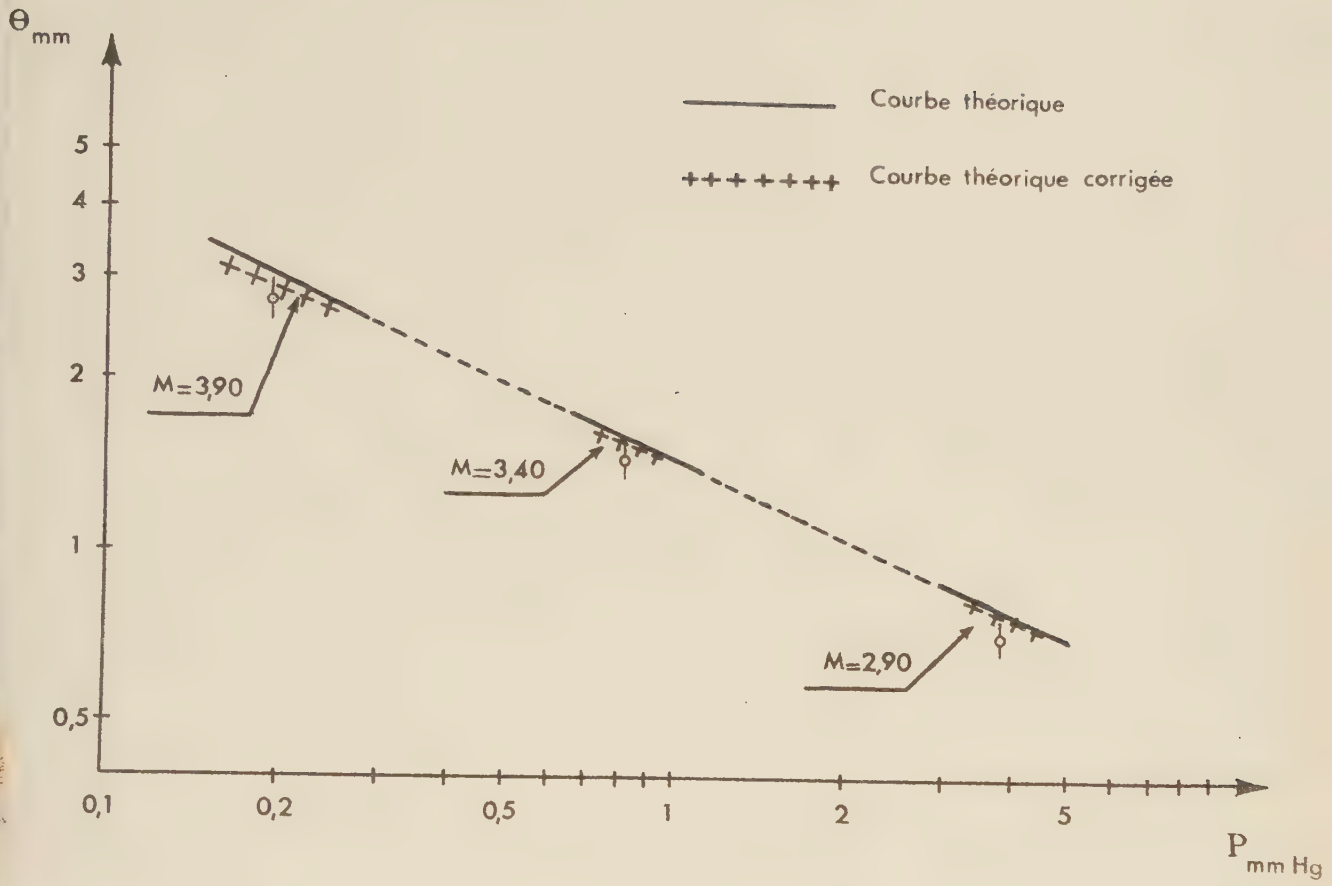


Fig 13 - Flèches maxima observées et comparaison avec les résultats théoriques.

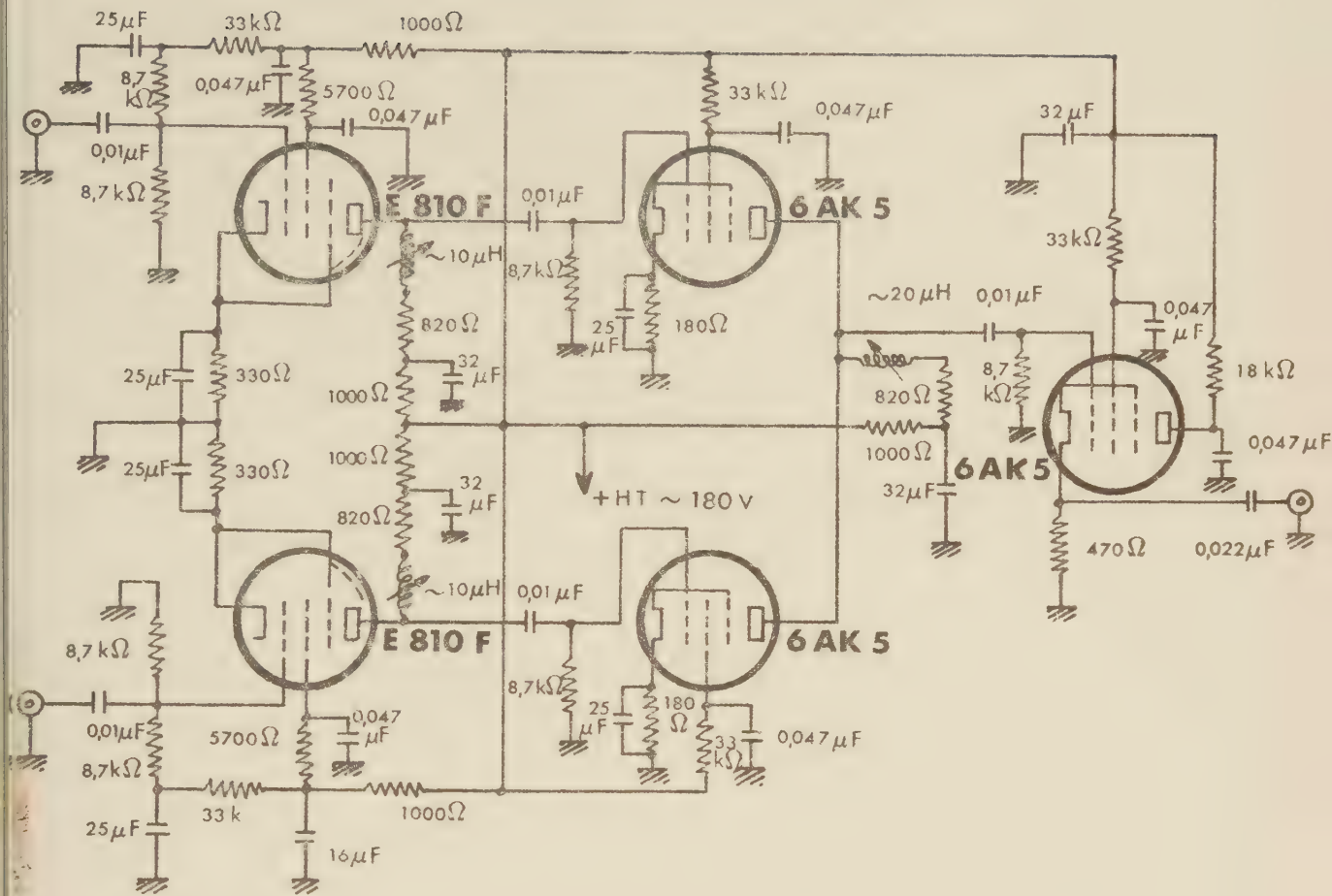


Fig. 8 - Préamplificateur des signaux en provenance des sondes de mesure.

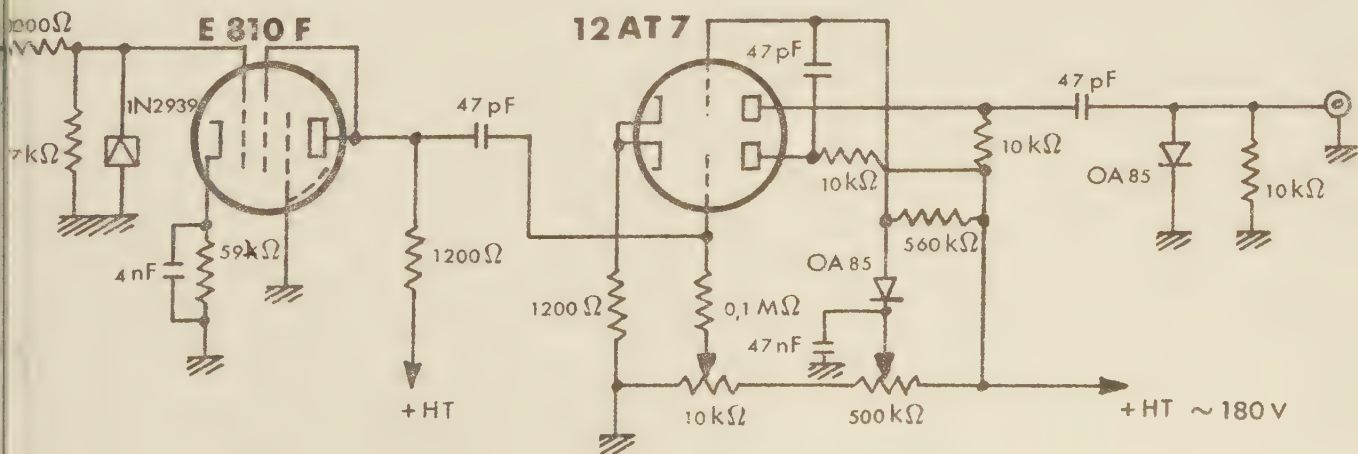


Fig. 9 - Retardeur d'impulsion pour le déclenchement de l'oscilloscope.

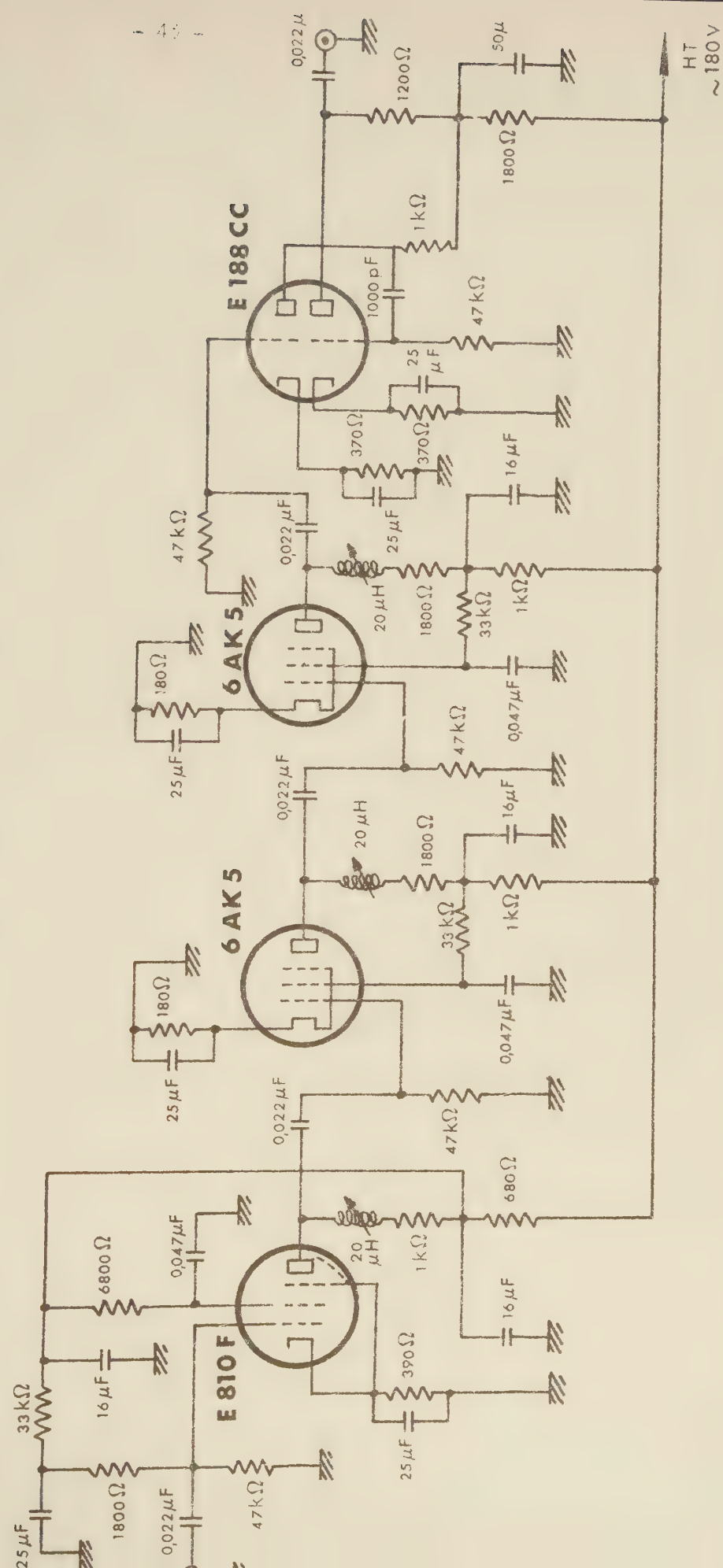


Fig. 10 - Préamplificateur des signaux le déclenchement is circulaire et électronique.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) R.A. HARTUNIAN :
- (a) Some viscous effects in shock tube flow Master's Thesis - Cornell University (1954)
 - (b) The Physics of fluids (1961) vol 4 - page 1059
- (2) S.C. LIN et W.I. FYFE :
- The Physics of Fluids 1961 vol 4 - page 238
- (3) R.E. DUFF et J.L. YOUNG :
- The Physics of Fluids (1961) vol 4 - page 812
- (4) P.C.T. de BOER :
- (a) The curvature of shock fronts in shock tubes ph. D. Thesis - University de Maryland (1962)
 - (b) The Physics of Fluids (1963) vol 6 page 962
- (5) H. MIRELS :
- (a) NACA T.N. 3401 - Mars 1955
 - (b) NACA T.N. 3712 - Mai 1956
 - (c) Proc. Int. Union of Theoretical and Appl. Mach.
H. Gortler ed. Springer Verlag - 1958. pp. 283 - 293.
 - (d) NACA T.N. D 291 - Fev. 1961
 - (e) The Physics of Fluids (1963) vol 6 page 1201
- (6) M. SICHEL :
- The Physics of Fluids 1962 vol 5 page 1168

- (7) NAVORD report 1488 (vol 6)

Handbook of supersonic aerodynamics-section 18-shock tubes

- (8) R. HARTUNIAN - A. RUSSO et P. MARRONE

Boundary layer transition and heat transfert in shock tubes -
Heat transfert and Fluid Mechanics Institute^h Juin 1958 -
Université de Californie - Berkeley.

- (9) R.J. VIDAL :

Model Instrumentation techniques for heat transfert and
forces measurements in a hypersonic shock tunnel - report
n° AD 917 A - 1 Cornell aeronautical laboratory Inc.

ANNEXE

$$\text{CALCUL DU RESTE DE LA SERIE : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - J_0(k\beta_n)}{\beta_n^{1+s} (-J_0\beta_n)}$$

Dans notre cas où $s = \frac{1}{2}$ et $n = 40$ le reste est :

$$R_n = \sum_{n=41}^{\infty} \frac{1 - J_0(k\beta_n)}{\beta_n^{3/2} (-J_0\beta_n)} = \sum_{n=41}^{\infty} \frac{-1}{\beta_n^{3/2} J_0(\beta_n)} + \sum_{n=41}^{\infty} \frac{J_0(k\beta_n)}{\beta_n^{3/2} J_0(\beta_n)}$$

$$1^{\circ}) \text{ Calcul de } R_{n1} = \sum_{n=41}^{\infty} \frac{-1}{\beta_n^{3/2} \cdot J_0(\beta_n)}$$

A partir du développement asymptotique de $J_0(\beta_n)$ et de l'approximation $\beta_n \sim n\pi + \frac{\pi}{4}$

on peut écrire pour $n > 40$ avec une erreur relative sur chaque terme inférieure à 10^{-4} :

$$\frac{-1}{\beta_n^{3/2} \cdot J_0(\beta_n)} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2\pi} (n + \frac{1}{4})}$$

Ce qui donne sans difficulté $R_{n1} \sim 0,0049$

L'erreur résultant de l'approximation ci-dessus étant $< 5 \cdot 10^{-7}$

$$2^{\circ}) \text{ Calcul de } R_{n2} = \sum_{n=41}^{\infty} \frac{J_0(k\beta_n)}{\beta_n^{3/2} \cdot J_0(\beta_n)}$$

a) $k = 1$

Dans ce cas le reste se réduit à $R_{n2} = \sum_{n=41}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{3/2}}$
 L'approximation précédente $\beta_n \sim n\pi + \frac{\pi}{4}$ ramène à une série de puissance dont la méthode classique de comparaison avec l'intégrale $\int_{40}^{\infty} \frac{1}{(x\pi + \frac{\pi}{4})^{3/2}} dx$ permet d'obtenir une valeur très approchée du reste.

On trouve $R_{n2} = 0,0565$ avec une erreur par excès inférieure à 3.10^{-4} .

b) $k \neq 1$

La série de terme général $\frac{J_0(k\beta_n)}{\beta_n^{3/2} J_0(\beta_n)}$ comporte des groupes de termes alternativement positifs et négatifs. On montre aisément, en remplaçant dans le terme général ci-dessus J_0 par son développement asymptotique, que le nombre de termes de même parité est de l'ordre de $\frac{1}{1-k}$. Une majoration du reste sera dès lors obtenue en considérant la somme $\frac{1-k}{1-k}$ des n derniers termes négligés.

Dans le cas où $\frac{1}{1-k}$ n'est pas entier le nombre de termes alternativement positifs ou négatifs est $\frac{1-k}{1-k}$ l'un ou l'autre des 2 entiers les plus proches de $\frac{1}{1-k}$.

La précision obtenue varie légèrement avec k mais elle est, dans la plupart des cas, de l'ordre du dernier terme négligé.

TABLE DES MATIERES

	pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
 <u>CHAPITRE I - ETUDE THEORIQUE</u>	
I - Equations de base	3
II - Calcul du potentiel des vitesses de perturbation - Equation de la méri- dienne à la surface d'onde.....	6
III - Résolution de l'équation de la méri- dienne à la surface d'onde.....	10
1) cas où $F(x) = \frac{s AU_2}{(\beta x)^{1-s}}$	10
a) Calcul de l'intégrale	11
b) Résultats numériques pour $s = \frac{1}{2}$	13
c) Calcul du coefficient A	14
2) Cas général	15
a) Configuration de l'écoulement immédiatement en aval de l'onde. de choc.....	15
b) Extension et évolution de la couche limite.....	18
c) Phénomènes de relaxation.....	19
 <u>CHAPITRE II - APPAREILLAGE ET TECHNIQUES DE MESURE.</u>	
I - Tube à choc et équipement	21
II - Principe de mesure de la courbure de l'onde de choc	22
III - Détecteurs à film de platine	
1) Description	23
2) Caractéristique dynamique - Temps de réponse.....	24
IV - Signaux délivrés par les sondes - Prémplification..	27
V - Mesure de la vitesse de l'onde de choc.....	30

CHAPITRE III - RESULTATS EXPERIMENTAUX

I - Conditions de mesure et dépouillement des clichés ...	30
II - Précision des résultats obtenus	35
III - Influence de l'épaisseur de l'onde de choc	36
<u>CONCLUSION</u>	38
<u>FIGURES ET SCHEMAS</u>	39
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	44
<u>ANNEXE</u>	46

Vu :

Vu et approuvé :

Les Membres du Jury

Le Doyen de la Faculté des Sciences

MM. G. MESNARD

J. BRACONNIER

CH. EYRAUD

J. GRUAT

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 1-3 JUIL 1964

Le Recteur, Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS

